Cours MALG & MOVEX

MOVEX2
Modélisation synchrone

Dominique Méry
Telecom Nancy, Université de Lorraine
(22 mai 2025 at 11:27 P.M.)

Année universitaire 2024-2025

Summary

Summary

Le langage LUSTRE

- LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- LUSTRE est la base de SCADE un environnement de dévelopement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)

Le langage LUSTRE

- LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- LUSTRE est la base de SCADE un environnement de dévelopement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)

Le langage LUSTRE

- LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- LUSTRE est la base de SCADE un environnement de dévelopement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)

- LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- LUSTRE est la base de SCADE un environnement de dévelopement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique (Paul Caspi et Nicolas Halbwachs, 1984)

(Flôt de données)

Listing 2 – count.lus

```
node COUNT (init,incr:int;reset:bool) returns (n: int);
let
   n = init ->
       (if reset then init else pre(n) +incr);
tel;
```

- LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- LUSTRE est la base de SCADE un environnement de dévelopement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique.

- LUSTRE est un langage synchrone à flôts de données.
- LUSTRE est la base de SCADE un environnement de dévelopement utilisé dans les véhicules de transport (avionique).
- LUSTRE a la possibilité d'une représentation graphique.

(Flôt de données)

Listing 4 – dataflow1.lus

```
-- count
node count(x,y:int)  returns (r: int);
let

  r = 5*(x+y);

tel
```

Langage à flôt de données

- production : Un flôt d'entrées produit un flôt (flux) de sorties :

$$flot \in input^N \rightarrow outpout^N$$
$$flot(i_0, i_1, \dots i_n) = (o_0, o_1, \dots o_n)$$

- réaction :

$$flot \in input \times state \rightarrow output \times state$$
$$flot(in, s_t) = (out, s_{t+1})$$

Le code engendré correspond à la fonction de cycle.

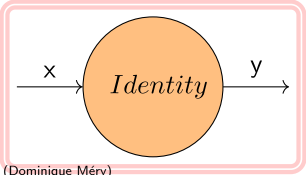
Forme générale d'un module LUSTRE

node $f(x_1 : \alpha_1, \ldots, x_n : \alpha_n)$ returns $(y_1 : \beta_1, ..., y_m : \beta_m)$
var $z_1 : \gamma_1, ..., z_k : \gamma_k;$
let
$z_1 = \delta_1; ...; z_k = \delta_k;$
$y_1 = \epsilon_1; ...; y_m = \epsilon_m;$
assert $P_1; \ldots;$ assert $P_l;$
tel

Node Identity

node $I(x : int)$ returns $(y : int)$
let
$y = x$
assert $x = y$;
tel

- Copie de la stream x vers la stream y.
- $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$
- recopie
- $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots)$



Programmes LUSTRE

- Un programme LUSTRE est une liste de modules appelés des nœuds.
- Tous les nœuds fonctionnent de manière synchrone.
- Les communications sont réalisées via les inputs et les outputs.
- Les équations doivent avoir des solutions et ne sont pas des affectations.

- Toutes les variables, constantes et expressions sont des streams.
- Les opérations classiwues sont étendues sur les streams :
  - $x = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$
  - $y = (1, 2, 3, 4, \ldots)$
  - $x+y = (1, 3, 5, 7, \ldots)$
- Chaque stream correspond à une horloge.

Summary

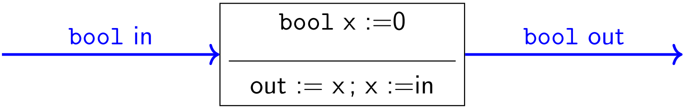
Synchronous Reactive Component (R. Alur)

A Synchronous Reactive Compoent C is defined by :

- a finite set I of of typed input variables defining the set of Q_I of inputs.
- a finite set O of of typed output variables defining the set of Q_O of outputs.
- a finite set S of of typed state variables defining the set of Q_S of states.
- an initiialisation Init defining the set $[\![Init]\!] \subseteq Q_S$ of initial states
- a reaction description $React$ defining the set $[\![React]\!]$ of reactions of the form $s \xrightarrow{i/o} s'$ where $i \in Q_I, o \in Q_O, s, s' \in Q_S$.

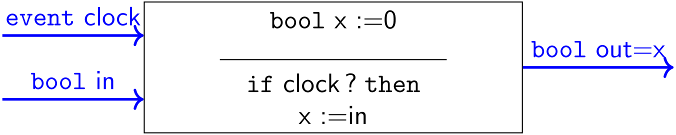
- an execution of a synchronous reactive component C is a sequence : $s_0 \xrightarrow{i_1/o_1} s_1 \xrightarrow{i_2/o_2} \ldots s \xrightarrow{i/o} s' \ldots$

A simple example I



- $0 \xrightarrow{1/0} 1$;
- $0 \xrightarrow{1/0} 1$
- $1 \xrightarrow{0/1} 0$;
- $1 \xrightarrow{1/1} 1$;

A simple example II



- $0 \stackrel{(1,\bot)/0}{\longrightarrow} 0\,;$
- $0 \stackrel{(1,\top)/1}{\longrightarrow} 1\,;$
- $1 \stackrel{(0,\bot)/1}{\longrightarrow} 1\,;$
- $1 \stackrel{(1,\bot)/1}{\longrightarrow} 1\,;$
- $1 \stackrel{(0,\top)/0}{\longrightarrow} 0\,;$

Summary

Tools for LUSTRE

- Development Tools for Critical Reactive Systems using the Synchronous Approach The Verimag Reactive Tool Box
- Compilation of LUSTRE program into C programs.

Multi-engine SMT-based automatic model checker for synchronous reactive systems

- Automatic analysis of LUSTRE porograms
- SMT-based tools
- k-induction

Summary

Exemple de programme LUSTRE (1)

(Sommation)

Listing 5 – sum.lus

```
-- the current value of Sum(X) is the sum of all values of X up to now
node sum (X: int) returns (S: int);
let
   S = X -> X + (pre S);
tel

--         0   1   2   3   4   5 ...
--    ______________________________
--    X =  5,  3, -1,  2,  7,  8, ...
--    S =  5,  8,  7,  9, 16, 24, ...
```

Exemple de programme LUSTRE (2)

(Fibonacci)

Listing 6 – fibo.lus

```
--------------------------------------------------------------------
-- This node produces the Fibonacci series: 1,1,2,3,5,8,13,21,...
--------------------------------------------------------------------

node fibo(_:bool) returns(Fib: int);
let
   Fib = 1 -> pre (1 -> Fib + pre Fib);
tel
```

Exemple de programme LUSTRE (3)

(Opérations)

Listing 7 – operations.lus

```
-- operations over nodes
node op (X: int;Y:int) returns (S,P,POLY,POLY2:int;TEST:bool);
let

   S =  X + Y;
   P = X*Y;
   POLY = X*X + 2*X*Y + Y*Y;
   POLY2 = S*S;
   TEST = (POLY = POLY2);
   check TEST;

tel
```

Summary

Horloges

- Toutes les expressions sont des streams.
- Les opérateurs d'horloge modifient la temporalité des streams et le résultat est stream :
  - `pre` s pour toute stream s.
  - $s1 -> s2$ s1 *suivi de* s2.
  - $s1$ `when` $s2$ *échantillonnage*
  - `current` s pour toute stream s.

Sémantique des horloges

- $[\![\sigma]\!] \stackrel{def}{=} (\sigma_0, \sigma_1, \ldots)$
- $[\![\texttt{pre}(\sigma]\!]) \stackrel{def}{=} (\perp, \sigma_0, \sigma_1, \ldots)$
- $[\![\sigma- >\tau]\!]) \stackrel{def}{=} (\sigma_0, \tau_1, \tau_2, \ldots)$
- $[\![\sigma \texttt{ when } \varphi]\!]) \stackrel{def}{=} (\sigma_{t_0}, \tau_{t_1}, \tau_{t_2}, \ldots)$ où la suite des t_i est la suite des instants validant φ dans la suite σ.
- $[\![\texttt{current}(\sigma \texttt{ when } \varphi]\!])) \stackrel{def}{=}$
  $(\perp, \ldots, \perp, \sigma_{t_0}, \sigma_{t_0}, \sigma_{t_0}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_1}, \sigma_{t_2}, \ldots)$

Exemple d'horloges

(Horloge)

Listing 8 – clock1.lus

```
node clock1(b: bool) returns (y: int);
var n:int;
var e:bool;
var f:int;
let
  n = 0 -> pre(n)+1;
  e = true ->  not pre(e);
  f = current ( n when e);
  y = current ( n when e) div 2;
tel
```

`current` n'est pas supporté.

Summary

Semantical Concepts for Reactive Programming

`4`	4	4	$\ldots$	4	$\ldots$
`x`	x_0	x_1	$\ldots$	x_n	$\ldots$
`y`	y_0	y_1	$\ldots$	y_n	$\ldots$
`x+y`	x_0+y_0	x_1+y_1	$\ldots$	x_n+y_n	$\ldots$

`x`	x_0	x_1	$\ldots$	x_n	$\ldots$
`pre x`	NIL	x_0	$\ldots$	x_{n-1}	$\ldots$

`x`	x_0	x_1	$\ldots$	x_n	$\ldots$
`y`	y_0	y_1	$\ldots$	y_n	$\ldots$
`x->y`	x_0	y_1	$\ldots$	y_n	$\ldots$

- `nat = 0 -> (1 + pre nat)`

`h`	**true**	**false**	**true**	**true**	**false**
`x`	x_0	x_1	$\ldots$	x_n	$\ldots$
`x when h`	x_0	$-$	x_2	x_3	$-$

Programmes LUSTRE

- **Un programme LUSTRE s'appelle un nœud ou NODE.**
- **Un programme LUSTRE dénote une suite infinie de valeurs comme suit :** $(x_0 \ x_1 \ x_2 \ \ldots)$
- **Deux opérateurs sur les programmes :**
  - $\mathbf{pre}$
  - $\longrightarrow$
- $\forall n \geq 0. CUP_{n+1} = CUP_n + 1$ **s'écrira** $CUP = 0 \longrightarrow (1 + \mathbf{pre}(CUP))$
- **et produira la suite** $(0 \ 1 \ 2 \ \ldots)$**.**
- $FIB = 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow (\mathbf{pre}(FIB) + \mathbf{pre}(\mathbf{pre}(FIB)))$

- $$\begin{array}{l} node \quad EDGE(X : bool) \quad returns \quad (Y : bool) \\ let \\ \quad Y = false \rightarrow \ X \ and \ not \ pre(X) \\ tel \end{array}$$

  désigne la suite $(false, x_1 \wedge \neg x_0, x_2 \wedge \neg x_1, \ \ldots)$

- **Counter**

  $C = 0 \longrightarrow \mathbf{pre}(C){+}1$ **renvoie la suite des naturels**

  $C = 0 \longrightarrow if \ \ X \ \ then \ \mathbf{pre}(C){+}1 \ else \ \mathbf{pre}(C)$

  compte le nombre d'occurrences de X **qui sont vraies.**

  On ignore la valeur initiale

  $PC = 0 \longrightarrow \mathbf{pre}(C)$

  $C = if \ \ X \ \ then \ \ PC{+}1 \ \ else \ \ PC$

Compteur

- $$
\begin{array}{l}
node COUNTER(init, incr : int; X, reset : bool) returns (C : int) \\
let \\
\quad PC = init -> \ pre\ C \\
\quad C = if\ reset\ then\ init \\
\quad\quad else\ if\ X\ then\ (PC{+}incr) \\
\quad\quad else PC; \\
tel
\end{array}
$$

- $odds = COUNTER(0, 2, true, true- > false)$ **définit les entiers impairs.**

- **Deux opérateurs sur les programmes :**
  - **pre**
  - $\longrightarrow$

  T
- $X \ when \ B$
- $current \ X$
- $assert$
  - $assert \ not \ (x \ and \ y \ )$
  - $assert \ (true- > not(x \ and \ pre(x)))$

Compteur

```
node COUNTER(init,incr:int; X,reset:bool) returns (C:int)
let
   PC=init->  pre C
   C = if reset then init
       else if X then (PC+incr)
       else PC;
tel
```

- $odds = COUNTER(0, 2, true, true- > false)$ définit les entiers impairs.

- **Deux opérateurs sur les programmes :**
  - **pre**
  - $\longrightarrow$
- X *when* B **: filtre de** X **quand la valeur de** B **est vraie.**
- *current* X **: interpolation de** X
- $and, not, or, xor, \ldots$ **sont des opérateurs booléens sur les streams.**
- *assert*
  - $assert\ not\ (x\ and\ y\ )$
  - $assert\ (true - > not(x\ and\ pre(x)))$
- **réutilisation de nœuds**

```
node FALLING_EDGE(X:bool) returns (Y:bool)
let
   Y= EDGE(not X);
tel
```

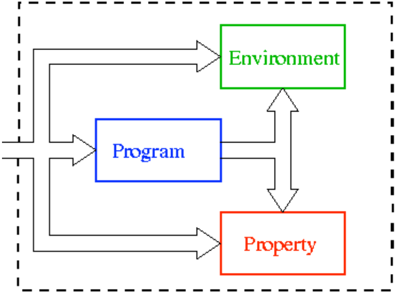
- **Soit f une fonction du temps à valeurs réelles et on souhaite l'intégrer selon la méthode des trapèzes.**
- **Deux valeurs sont reçues par le programme $F_n = f(x_n)$ et $x_{n+1} = x_n + STEP_{n+1}$**
- **Calcul de Y : $Y_{n+1} = Y_n + (F_n + F_{n+1}) \cdot STEPn + 1/2$**
- **La valeur de Y est une donnée**

```
node integration(F,STEP,init:real) returns (Y:real)
let
   Y= init -> pre(Y)+ ((F + pre(F))*STEP)/2.0;
tel
```

Summary

Vérification par observateurs

- **Description de la propriété à vérifier et les hypothèses de l'environnement**
- **Un observateur d'une propriété de sûreté est un programme qui utilise comme entrée les entrées-sorties du programme à vérifier et décide en émettant un signal à chaque instant si la propriété est violée ou non**



Programmer un switch

- Transformer un signal en niveau par un swith qui est utilisé comme suit :
  - deux signaux possibles en entrée set et reset
  - une valeur initiale initial
  - toute occurence de set fait passer le niveau à true
  - toute occurence de reset fait passer le niveau à false
  - quand aucun des signaux n'apparaît, le niveau ne change pas
- un signal est modélisé comme un booléen :

```
node SWITCH1(set,reset,initial: bool) returns (level:bool)
let
   level = initial -> if set the true
                      else if reset then false
                      else pre(level);
tel
```

- Problème : ce programme ne modélise pas un switch à un bouton :

```
state =  SWITCH1(change,change,true)
```

Programmer un switch à un bouton

- **Transformer un signal en niveau par un swith qui est utilisé comme suit :**
  - **deux signaux possibles en entrée set et reset**
  - **une valeur initiale initial**
  - **toute occurence de set fait passer le niveau à true**
  - **toute occurence de reset fait passer le niveau à false**
  - **quand aucun des signaux n'apparaît, le niveau ne change pas**
- ```
  node SWITCH(set,reset,initial: bool) returns (level:bool)
  let
     level = initial -> if set and not pre(level)  then true
                        else if reset then false
                        else pre(level);
  tel
  ```
- **Vérification :**

  ```
  node verification(set,reset,initial: bool) returns (ok:bool)
  let
     level = SWITCH(set,reset,initial);
     level1 = SWITCH(set,reset,initial);
     ok = (level = level1);
     assert  not(set  and reset)
  tel
  ```
  ```

(power2 avec vérification)

Listing 9 – power2prop.lus

```
-- power2(_) contains all the square  numbers in increasing order
-- where 0^2 = 0
--        (n+1)^2 = n^2 +2*n + 1
node power2(_ : bool) returns (P: int);
var W: int;
var P2:int;
var PROP:bool;
var N:int;
let
  -- all the natural even numbers
  W = 1 -> (pre W) + 2;
  P = 0 -> (pre P) + (pre W);
  N = 0 -> (pre N)+1;
  P2 = N*N;
  PROP  = P2 = P;
  check PROP;

tel
```

Application de la k-induction : `kind2 --enable BMC --enable IND`

Summary

Propriétés des programmes LUSTRE

()

Listing 10 – kindsession2/power2.lus

```
-- power2(_) contains all the square  numbers in increasing order
-- where 0^2 = 0
--        (n+1)^2 = n^2 +2*n + 1
node power2() returns (P: int);
var W: int;
let
  -- all the natural even numbers
  W = 1 -> (pre W) + 2;
   P = 0 -> (pre P) + (pre W);
tel
```

Propriétés des programmes LUSTRE

()

Listing 12 – kindsession2/power2.lus

```
-- power2(_) contains all the square  numbers in increasing order
-- where 0^2 = 0
--        (n+1)^2 = n^2 +2*n + 1
node power2() returns (P: int);
var W: int;
let
  -- all the natural even numbers
  W = 1 -> (pre W) + 2;
  P = 0 -> (pre P) + (pre W);
tel
```

(`--enable BMC --enable IND`)

Listing 13 – kindsession2/power2prop.lus

```
-- power2(_) contains all the square  numbers in increasing order
-- where 0^2 = 0
--        (n+1)^2 = n^2 +2*n + 1
include "power2.lus"
node power2prop() returns (P: int);
var P2,PP2,N:int;
var PROP:bool;
let
  PP2 = power2();
  N = 0 -> (pre N)+1;
  P2 = N*N;
  PROP  = P2 = PP2;
  check PROP;
tel
```

()

Listing 14 – kindsession2/greycounter.lus

```
node greycounter (reset: bool) returns (out: bool);
var a, b: bool;
let
  a = false -> (not reset and not pre b);
  b = false -> (not reset and pre a);
  out = a and b;

tel
```

()

Listing 15 – kindsession2/intcounter.lus

```
node intcounter (reset: bool; const max: int) returns (out: bool);
var t: int;
let
  t = 0 -> if reset or pre t = max then 0 else pre t + 1;
  out = t = 2;
tel
```

(Valid property)

Listing 16 – kindsession2/ex1.lus

```
/* include    */
include "greycounter.lus"

/* include    */
include "intcounter.lus"


node top (reset: bool) returns (OK, OK2: bool);
var b, d: bool;
let
  b = greycounter(reset);
  d = intcounter(reset, 3);
  OK = b = d;
 --%PROPERTY OK;
tel
```

Propriétés des programmes LUSTRE

(Invalid property)

Listing 17 – kindsession2/ex2.lus

```
/* include    */
include "greycounter.lus"

/* include    */
include "intcounter.lus"


node top (reset: bool) returns (OK, OK2: bool);
var b, d: bool;
let
  b = greycounter(reset);
  d = intcounter(reset, 3);
  OK = b = d;
  OK2 = not d;
  --  %PROPERTY OK;
  --%PROPERTY OK2;
tel
```

Summary

....

⊠ Definition

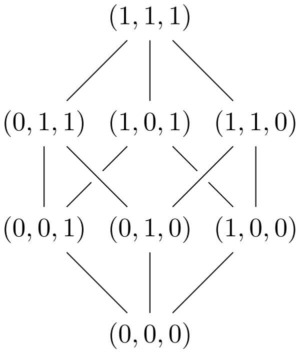
Un treillis complet $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$ est un treillis satisfaisant les propriétés suivantes :

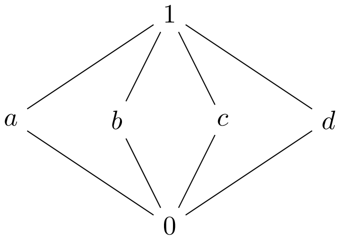
1. Pour toute partie A de L, il existe une borne supérieure notée $\sqcup A$.
2. Pour toute partie A de L, il existe une borne inférieure notée $\sqcap A$.

....

- Un treillis complet $(L, \sqsubseteq,)$ peut être défini par les éléments suivants $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$
- Un treillis est une structure munie d'un ordre partiel et telle que deux éléments ont une borne supérieure et une inférieure dans le treillis : $(L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap)$
  - $a \sqcup b$ existe et est la borne supérieure des deux éléments a et b.
  - $a \sqcap b$ existe et est la borne inférieure des deux éléments a et b.

Représentation par des diagrammes de Hasse





Pre/Post Points-fixes

Pour une fonction f définie sur un treillis $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$ et à valeurs dans $(L, \sqsubseteq, \perp, \sqcup, \top, \sqcap)$.

Définition

- on appelle pré-point-fixe de f, tout élément x de L satisfaisant la propriété $f(x) \sqsubseteq x$
- on appelle post-point-fixe de f, tout élément x de L satisfaisant $x \sqsubseteq f(x)$.

- $PostFIX(f) = \{x | x \in L \wedge x \sqsubseteq f(x)\}$: l'ensemble des post-points-fixes de f.
- $PreFIX(f) = \{x | x \in L \wedge f(x) \sqsubseteq x\}$: l'ensemble des pré-points-fixes de f.
- $FIX(f) = \{x | x \in L \wedge f(x) = x\}$: l'ensemble des points-fixes de f.

Théorème de Knaster-Tarski (I)

Soit f une fonction monotone croissante sur un treillis complet $(T, \bot, \top, \bigvee, \bigwedge)$. Alors il existe un plus petit point fixe et un plus grand point fixe pour f.

- μf désigne le plus petit point fixe de f.
- νf désigne le plus grand point fixe de f.
- μf vérifie les propriétés suivantes : $f(\mu f) = \mu f$ et $\forall x \in T. f(x) \sqsubseteq x \Rightarrow \mu f \sqsubseteq x$ (μf est la borne inférieure des prépoints fixes de f ou $\bigwedge(Pre(f))$).
- νf vérifie les propriétés suivantes : $f(\nu f) = \nu f$ et $\forall x \in T. x \sqsubseteq f(x) \Rightarrow x \sqsubseteq \nu f$ (νf est la borne supérieure des postpoints fixes de f ou $\bigvee(Post(f))$).

Preuve

Posons $y = \bigwedge\{x|f(x) \sqsubseteq x\}$ et montrons que y est un point fixe de f et que y est le plus petit point fixe de f.

1. $f(y) \sqsubseteq y$
   - Pour tout x de $\{x|f(x) \sqsubseteq x\}$, $y \sqsubseteq x$
   - $f(y) \sqsubseteq f(x)$ (par monotonie de f).
   - $f(x) \sqsubseteq x$ (par définition de x).
   - $f(y) \sqsubseteq x$ (par déduction).
   - $f(y) \sqsubseteq \bigwedge\{x|f(x) \sqsubseteq x\}$ (par définition de la borne inférieure, $f(y)$ est un minorant).
   - $f(y) \sqsubseteq y$
2. $y \sqsubseteq f(y)$
   - $f(y) \sqsubseteq y$ (par le cas 1)
   - $f(f(y)) \sqsubseteq f(y)$ (par monotonie de f)
   - $f(y) \in \{x|f(x) \sqsubseteq x\}$
   - $y \sqsubseteq f(y)$ (par définition de la borne inférieure)
3. Conclusion : $f(y) = y$ ou $y \in FIX(f)$.

Preuve

- $f(y) = y$ et z tel que $f(z) = z$
  - $f(z) = z$ (par hypothèse sur z)
  - $f(z) \sqsubseteq z$ (par affaiblissement de l'égalité)
  - $z \in \{x|f(x) \sqsubseteq x\}$ (par définition de cet ensemble)
  - $y \sqsubseteq z$ (par construction)
- y est le plus petit point fixe de f.

lfp(f) et gfp(f)

- $\mu f = lfp(f) = \bigwedge\{x|f(x) \sqsubseteq x\}$
- $\nu f = gfp(f) = \bigvee\{x|x \sqsubseteq f(x)\}$

- $lfp(f)$ signifie *least fixed-point*
- $gfp(f)$ signifie *greatest fixed-point*

Positionnement des éléments

$$
\begin{array}{c}
\top \\
| \\
x \in \{x | f(x) \sqsubseteq x\} \\
| \\
\nu f \\
| \\
x \in \{x | x = f(x)\} \\
| \\
\mu f \\
| \\
x \in \{x | x \sqsubseteq f(x)\} \\
| \\
\bot
\end{array}
$$

- $\top = \sqcup\{x | f(x) \sqsubseteq x\}$
- $gfp(f) = \nu f = \sqcup\{x | x \sqsubseteq f(x)\}$
- $lfp(f) = \mu f = \sqcap\{x | f(x) \sqsubseteq x\}$
- $\bot = \sqcap\{x | x \sqsubseteq f(x)\}$

Preuve algébrique selon Hoare

- $x \in pre(f)$ **si, et seulement si,** $f(x) \leq x$ (définition)

Preuve algébrique selon Hoare

- $x \in pre(f)$ **si, et seulement si,** $f(x) \leq x$ (définition)
- $\forall a \in pre(f).\mu f \leq a$ (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)

Preuve algébrique selon Hoare

- $x \in pre(f)$ **si, et seulement si,** $f(x) \leq x$ (définition)
- $\forall a \in pre(f).\mu f \leq a$ (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- $\forall a \in pre(f).f(\mu f) \leq f(a) \leq a$ (croissance de f et propriété de a)

Preuve algébrique selon Hoare

- $x \in pre(f)$ **si, et seulement si,** $f(x) \leq x$ (définition)
- $\forall a \in pre(f).\mu f \leq a$ (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- $\forall a \in pre(f).f(\mu f) \leq f(a) \leq a$ (croissance de f et propriété de a)
- $f(\mu f) \leq \mu f$ (application pour $a = \mu f$))

- $x \in pre(f)$ **si, et seulement si,** $f(x) \leq x$ (définition)
- $\forall a \in pre(f).\mu f \leq a$ (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- $\forall a \in pre(f).f(\mu f) \leq f(a) \leq a$ (croissance de f et propriété de a)
- $f(\mu f) \leq \mu f$ (application pour $a = \mu f$))
- $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$ (croissance de f)

Preuve algébrique selon Hoare

- $x \in pre(f)$ **si, et seulement si,** $f(x) \leq x$ (définition)
- $\forall a \in pre(f).\mu f \leq a$ (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- $\forall a \in pre(f).f(\mu f) \leq f(a) \leq a$ (croissance de f et propriété de a)
- $f(\mu f) \leq \mu f$ (application pour $a = \mu f$))
- $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$ (croissance de f)
- $f(\mu f) \in pre(f)$ (définition des pré-points-fixes)

Preuve algébrique selon Hoare

- $x \in pre(f)$ **si, et seulement si,** $f(x) \leq x$ (définition)
- $\forall a \in pre(f).\mu f \leq a$ (application de la définition de la borne inférieure d'un ensemble)
- $\forall a \in pre(f).f(\mu f) \leq f(a) \leq a$ (croissance de f et propriété de a)
- $f(\mu f) \leq \mu f$ (application pour $a = \mu f$))
- $f(f(\mu f)) \leq f(\mu f)$ (croissance de f)
- $f(\mu f) \in pre(f)$ (définition des pré-points-fixes)
- $\mu f \leq f(\mu f)$ (définition de μf)
- $\mu f = f(\mu f)$ (définition de μf et propriété précédente)

Version constructive du théorème de Knaster-Tarski

Soit f une fonction monotone croissante sur un treillis complet $(T, \perp, \top, \bigvee, \bigwedge)$. Alors

1. La structure formée des points fixes de f sur T, $(fp(f), \sqsubseteq)$ est un treillis complet non-vide.
   $(fp(f) = \{x \in T : f(x) = x\}$
2. $lfp(f) \stackrel{def}{=} \bigvee_{\alpha} f^{\alpha}$ est le plus petit point fixe de f où :
   $$\left\{\begin{array}{llll} & f^0 & \stackrel{def}{=} & \perp \\ \alpha \textit{ ordinal successeur} & f^{\alpha+1} & \stackrel{def}{=} & f(f^{\alpha}) \\ \alpha \textit{ ordinal limite} & f^{\alpha} & \stackrel{def}{=} & \bigvee_{\beta<\alpha} f^{\beta} \end{array}\right.$$
3. $gfp(f) \stackrel{def}{=} \bigwedge_{\alpha} f_{\alpha}$ est le plus grand point fixe de f où
   $$\left\{\begin{array}{llll} & f_0 & \stackrel{def}{=} & \top \\ \alpha \textit{ ordinal successeur} & f_{\alpha+1} & \stackrel{def}{=} & f(f_{\alpha}) \\ \alpha \textit{ ordinal limite} & f_{\alpha} & \stackrel{def}{=} & \bigwedge_{\beta<\alpha} f_{\beta} \end{array}\right.$$

Computing the least fixed-point over a finite lattice

INPUT $F \in T \longrightarrow T$
OUTPUT $result = \mu.F$
VARIABLES $x, y \in T, i \in \mathbb{N}$
$\ell_0 : \{x, y \in T\}$
$x := \bot;$
$y := \bot;$
$i := 0;$
$\ell_{11} : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0;k=i} F^k \wedge i \leq Card(T) \wedge i = 0\};$
WHILE $i \leq Card(T)$
  $\ell_1 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0;k=i} F^k \wedge i \leq Card(T)\};$
  $x := F(x);$
  $\ell_2 : \{x, y \in T \wedge x = F^{i+1} \wedge y = \bigcup_{k=0;k=i} F^k \wedge i \leq Card(T)\};$
  $y := x \sqcup y;$
  $\ell_3 : \{x, y \in T \wedge x = F^{i+1} \wedge y = \bigcup_{k=0;k=i+1} F^k \wedge i \leq Card(T)\};$
  $i := i+1;$
  $\ell_4 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0;k=i} F^k \wedge i \leq Card(T)+1\};$
OD;
$\ell_5 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0;k=i} F^k \wedge i = Card(T)+1\};$
$result := y;$
$\ell_6 : \{x, y \in T \wedge x = F^i \wedge y = \bigcup_{k=0;k=i} F^k \wedge i = Card(T)+1 \wedge result = y\};$

Verification in action

- Identify the safety property S to check.
- Run the algorithm for computing μF.
- Check that $\mu F \subseteq S$ or $\overline{S} \cap \mu F = \varnothing$.
- Check that $BUG \cap \mu F = \varnothing$, when BUG is a set of states that you identify as *bad states*.

Problem

- The general case is either infinite or large ... approximations of μF.
- Computing over abstract finite domain
- How to compute when it is not decidable ?
- Develop a framework for defining sound abstractions of software systems under analysis.

Expression du problème à résoudre

- S is the set of states
- $(\mathcal{P}(S\times S), \subseteq)$ is a complete lattice.
- $R \subseteq S\times S$ is a binary relation over S simulating the computation or the transition as $Next(x, x')$.
- $F \in \mathcal{P}(S\times S) \rightarrow \mathcal{P}(S\times S)$ is defined by the following expression :
  - $X \subseteq S\times S$
  - $I = \{(s, s) | s \in S\}$
  - $F(X) = I \cup R; X$

Transitive closure of R

- F is a monotonous function.
- F has a least-fixed point denoted μF.
- $\mu F = R^\star$
- $\forall n \in \mathbb{N} : F^{n+1}(\varnothing) = \bigcup_{i=0}^{n}$
- $\bigcup_{n\geq 0} F^n = R^\star$

Checking safety

- $G \subseteq S$ is the set of Good states.
- $I \subseteq S$ is the set of initial states.
- $\forall s_0, s \in S : s_0 \in I \wedge R^\star(s_0, s) \Rightarrow s \in G$ (Expression of safety of G)
- $\forall s \in S : (\exists s_0 . s_0 \in I \wedge R^\star(s_0, s)) \Rightarrow s \in G$
- $R^\star[I] \subset G$
- $R^\star[I] = \bigcup_{n \geq 0} F^n[I] = \bigcup_{n \geq 0} G^n$
- $\bigcup_{n \geq 0} G^n \subseteq G$ (Expression de la safety)

Techniques fo checking

$\bigcup_{n \geq 0} G^n \subseteq G$ is checked using at least two possible techniques :

- Bounded Model Checking
- k-Induction
- ...

Summary

Exemple de contrats

(simple contrat)

Listing 18 – kindsession2/contract0.lus

```
node g () returns ();
(*@contract
  assume true;
  guarantee true;
*)
const n = 7;
var t : int;
let
        t = n;

tel;
```

Exemple de contrats

(simple contrat)

Listing 19 – kindsession2/contract1.lus

```
contract countSpec(trigger: bool; val: int) returns (count: int ; error: bool) ;

let
  assume val >= 0;
  var initVal: int = val -> pre(initVal);
  var once: bool = trigger or (false -> pre once) ;
  guarantee count >= 0 ;

mode still_zero (
    require not once ;
    ensure count = initVal ;
  ) ;

mode gt (
    require not ::still_zero ;
    ensure count > 0 ;
  ) ;
tel
```

assumes

An assumption over a node n is a constraint one must respect in order to use n legally. It cannot depend on outputs of n in the current state, but referring to outputs under a pre is fine.
The idea is that it does not make sense to ask the caller to respect some constraints over the outputs of n, as the caller has no control over them other than the inputs it feeds n with.
The assumption may however depend on previous values of the outputs produced by n. Assumptions are given with the assume keyword, followed by any legal Boolean expression :

-

guarantees

Unlike assumptions, guarantees do not have any restrictions on the streams they can depend on. They typically mention the outputs in the current state since they express the behavior of the node they specified under the assumptions of this node.
Guarantees are given with the guarantee keyword, followed by any legal Boolean expression :

modes

A mode (R,E) is a set of requires R and a set of ensures E.
Modes are named to ease traceability and improve feedback.

(mode)

Listing 20 – kindsession2/mode.lus

```
mode <id> (
  [require <expr> ;]*
  [ensure  <expr> ;]*
);
```