Université de Lorraine
DIPLÔME: Ingénieur Telecom Nancy
Epreuve: UE MFCSI
Date : Mardi 13 décembre 2022, 14 h 00
Durée de l'épreuve : 1 h 30
Nom des rédacteurs : Dominique Méry
Lieu: Salle 1.8
Documents personnels autorisés

Le sujet compte trois (3) exercices. Vous devez bien lire le sujet et vous devez être aussi précis que possible.

Ecrit MFCSI

Exercice 1 (8 points)

Question 1.1 . Soit un tableau $t \in 1..n \rightarrow \mathbb{N}$ dont la dimension est $n \in \mathbb{N}$ différent de 0. On suppose que m et i sont deux variables entières.

Ecrire un événement $E1$ qui modélise l'affectation à m d'une valeur plus grande que 19 stockée dans le tableau t et qui affecte à i la valeur de l'indice où est stockée cette valeudans le tableau t.

Question 1.2 Soit un tableau $t \in 1..n \rightarrow \mathbb{N}$ dont la dimension est $n \in \mathbb{N}$ différent de 0. On suppose que i et j sont deux valeurs d'indice appartenant à $1..n$ et on suppose que t est une variable.

Ecrire un événement $E2$ qui affecte à t la valeur du tableau t mis à jour par permutation des éléments se trouvant en i et j.

Par exemple, si $t(1) = 1, t(2) = 2, t(3) = 3, t(4) = 4$, alors après observation de la permutation de $i = 1$ et $j = 4$, t devient $t(1) = 4, t(2) = 2, t(3) = 3, t(4) = 1$.

Question 1.3 Soit un tableau $t \in 1..n \rightarrow \mathbb{N}$ dont la dimension est $n \in \mathbb{N}$ différent de 0. On suppose que t est une variable.

Ecrire un événement $E4$ qui permute le contenu de deux cellules i et j si la valeur contenue dans i et plus grande que la valeur de j.

Par exemple, si $t(1) = 6, t(2) = 2, t(3) = 3, t(4) = 4$, alors après observation de la permutation, t devient $t(1) = 2, t(2) = 6, t(3) = 3, t(4) = 4$. Puis on peut observer à nouveau l'événement pour produire $t(1) = 2, t(2) = 4, t(3) = 3, t(4) = 6$.

Question 1.4 Soit une $m \in 1..n \times 1..m \rightarrow \mathbb{N}$ dont les dimensions sont $n, m \in \mathbb{N}$ différent de 0. Soit un tableau $l \in 1..n \rightarrow \mathbb{N}$ dont la dimension est $n \in \mathbb{N}$ différent de 0.

Ecrire un événement $E5$ qui affecte à la variable l le tableau contenant à l'indice $i \in 1..n$ la valeur minimale de la ligne i de m.

Exercice 2 (9 points)

Soit la machine suivante.

MACHINE QUESTION
VARIABLES
x
INVARIANTS
$I(x)$
EVENTS
INITIALISATION
BEGIN
$act1 : x := -23$
END
evt1
WHEN
$grd1 : x \in 12..45$
THEN
$act1 : x := x + 789$
END
END

evt2
WHEN
$grd1 : x \leq -12$
THEN
$act1$: $x := x + 2$
END
evt3
WHEN
$grd1 : x > -25$
THEN
$act1$: $x := x - 1$
END
END

On rappelle que une propriété $I(x)$ est inductivement invariante si $Init(x) \Rightarrow I(x)$ et pour tout événement e, $I(x) \wedge BA(e)\S x, x') \Rightarrow I(x')$. $BA(e)\S x, x')$ désigne la relation *before-after* nde l'événement e.

On rappelle qu'une propriété $J(x)$ est simplement invariante, si $J(x)$ est vraie pour tous les états du système.

Question 2.1 Ecrire la définition $BA(e)\S x, x')$ pour les événements evt1, evt2, evt3.

Nous allons étudier des solutions pour $I(x)$. Pour chaque question, vous devez préciser si l'assertion est inductivement invariante ou simplement invariante.

Question 2.2

$inv1 : x \in \mathbb{Z}$
$inv12 : x \in -25..-4$

Question 2.3

$inv1 : x \in \mathbb{Z}$
$inv12 : x \in -25..-16$

Question 2.4

$inv1 : x \in \mathbb{Z}$
$inv12 : x \in -30..-8$

Question 2.5

$inv1 : x \in \mathbb{Z}$
$inv12 : x \in -25..-10$

Question 2.6

$inv1 : x \in \mathbb{Z}$
$inv12 : x \in -24..-10$

Exercice 3 3 points

Nous considérons le problème du calcul de la fonction $f(x) = a * x^2 + b$ sans utiliser la fonction multiplication et la fonction puissance. Cette fonction a été construite à partir du modèle ALGO de la figure **??**.

Listing 1: Fonction F dérivée du modèle ALGO

```
#include <limits.h>
#include <stdio.h>
int F(int x,int a, int b)
{int  r,k,cv,cw;
  r=0;k=0;cv=b;cw=a;
  while (k<x)
        {
          k=k+1;
          cv=cv+cw;
          cw=cw+a+a;}
  r=cv;return(r);
}
```

Question 3.1 Ecrire la pre/post spécification de cette fonction qui exprime le calcul de $a * x^2 + b$ à partir des données a, b, x sous la forme:

contract $F(in\ A, B, X; out\ R)$
VARIABLES $A(int), B(int), X(int), R(int)$
requires $pre(x0, a0, b0, r0)$
ensures $post(x0, a0, b0, r0, xf, af, bf, rf)$

Nous utilisons l'identité suivante pour calculer: $a * (n+1)^2 + b = a * n^2 + 2 * a * n + a + b$. Cette identité oermet de construire trois suites u, v, w.

CONTEXT $C0$
CONSTANTS
a, b, x, v, w
AXIOMS
$axm1a : v \in \mathsf{Nat} \rightarrow \mathsf{Nat}$
$axm1b : w \in \mathsf{Nat} \rightarrow \mathsf{Nat}$
$axm2 : a \in \mathsf{Nat}$
$axm3 : b \in \mathsf{Nat}$
$axm4 : x \in \mathsf{Nat}$
$axm5 : w(0) = a$
$axm6 : \forall n \cdot n \in \mathsf{Nat} \Rightarrow w(n+1) = w(n) + a + a$
$axm7 : v(0) = b$
$axm8 : \forall n \cdot n \in \mathsf{Nat} \Rightarrow v(n+1) = v(n) + w(n)$
END

Question 3.2 Montrer, par récurrence que $\forall n. n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} w(n) = (2*n+1)*a \\ v(n) = a*n^2 + b \end{array} \right.$

Question 3.3 Ecrire les deux événements $\mathsf{INITIALISATION}$ et $\mathsf{computing}$ qui respectivement initialise les variables et qui exprime le calcul de $v(n)$ en le stockant dans la variable R. Il faudra aussi écrire l'invariant vérifié par les variables. On construit la machne $\mathsf{PREPOST}$. Pour cette machine, une seule variable est nécessaire r et ls valeurs a, b et x sont des valeurs constantes.

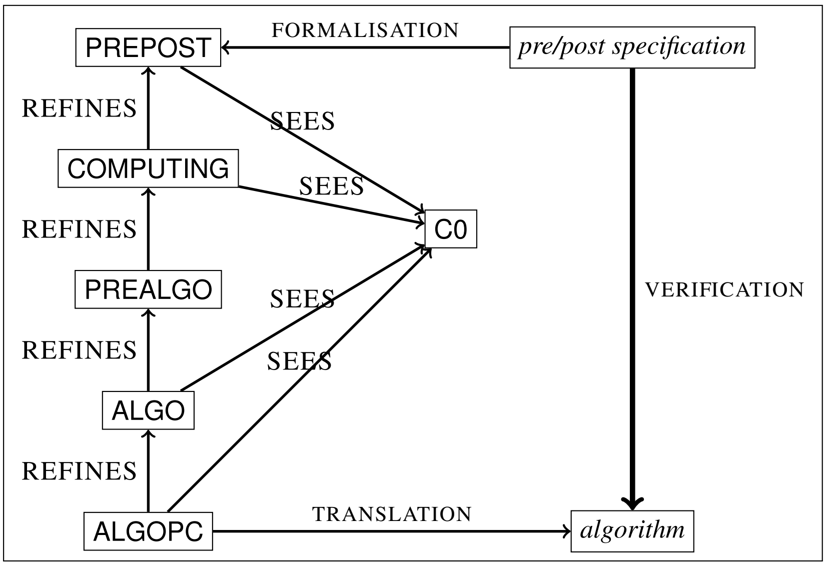

Figure 1: General Inductive Pattern

Fin de l'énoncé